$x \wedge y = 2 \Leftrightarrow (2 + nk) \wedge k = 2 \Leftrightarrow k \wedge 2 = 2$

$\Leftrightarrow k = 2p$ où $p \in \mathbb{Z}$

d'où $\begin{cases} x = 2 + 2np \\ y = 2p \end{cases}$ où $p \in \mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{Z}^2} = \{(2 + 2np, 2p)$

$* \begin{cases} x - ny = 2 \\ x \equiv y + 1\,(n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + nk \\ y = k \\ x \equiv y + 1\,(n) \end{cases}$

or $x \equiv y + 1\,(n) \Leftrightarrow 2 + nk \equiv k + 1\,(n) \Leftrightarrow k \equiv 1(n)$

d'où $k = np + 1$ où $p \in \mathbb{Z}$

$S = \{(2 + n^2p + n, np + 1)$ où $p \in \mathbb{Z}\}$

Solution 20 :

1°/ a) $U_n \wedge U_{n+1} = (x^n - 1, x^{n+1} - 1)$

or on a : $x^{n+1} - 1 = x(x^n - 1) + (x + 1)$

d'où $U_n \wedge U_{n+1} = (x^n - 1) \wedge (x - 1) = x - 1$

car : $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n+2} + ... + x + 1)$

Conclusion : $U_n \wedge U_{n+1} = x - 1$

b) U_n et U_{n+1} sont premieres entre eux ssi $x - 1 = 1$

d'où $x = 2$

2°/ d est une diviseur de n $\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = kd$

$U_n = U_{kd} = x^{kd} - 1 = (x^d) - 1) = (x^d)^k - 1)((x^d)^{k-1} + (x^d)^{k-2} + ... + x + 1)$

d'où U_d est un diviseur de U_n

3°/ $\delta = n \wedge m$

a) d'après l'identité de Bezout il existe (p,q) tel que : $mp - nq = \delta$

b) $U_{mp} - U_{nq}(U_\delta + 1) = U_{mp} - U_{nq}(x^\delta)$